OPUSCOLA TRIA AD RES MATHEMATICAS PERTINENTIA AUCTORE...

Antonio Mario Lorgna







OPUSCULA
TRIA
AD RES MATHEMATICAS PERTINENTIA

AUCTORE

ANTONIO - MARIO LORGNA

IN

Publico Militari Collegio Veronensi
Mathes. Profess.



VERONÆ
CIↃ IↃ CCLXVII.

Ex Typographia Ramanziniana
Superiorum Facultate.

ILLUSTRISSIMO, ET EXCELLENTISSIMO VIRO

D. D.

ANTONIO RENATO DE VOYER

MARCHIONI

IN PAULMY, ET ARGENSON,

REGNI GALLIÆ ADMINISTRO,

NUPER

IN EODEM REGNO TOTIUS REI BELLICÆ SUPREMO MODERATORI

Omnium Regiorum, & Militarium Ordinum Equiti, Commendatori, Magnoque Cancellario,

NUNC APUD

SERENISSIMAM VENETORUM REMPUBLICAM

CHRISTIANISSIMI REGIS ORATORI

&c. &c. &c.

UNI EX QUADRAGINTA ACADEMIÆ GALLICÆ VIRIS,

REGIÆ SCIENTIARUM ACADEMIÆ PARISINÆ

ACTUALI PRÆSIDI

Et Honorario in Regia Inscriptionum, & Humanarum Litterarum Academia &c. &c. &c.

ANTONIUS-MARIUS LORGNA FELICITATEM.



ID mihi profecto in animum inducere nequeo; Excellentissime Vir, ut ingratum prorsus Tibi futurum existimem, si qua obsequii significatione testata esse voluero singularis, qua me nuper hac transiens complexus es, humanitatis tuæ signa, quibus nihil mihi gratius, nihil honorificentius potuit um-

A 2 *quam*

2

quam accidere. Neque id aptius a me præstari posse intelligebam, quam si Tibi aliquid ex meis studiis depromtum, meæ in Te voluntatis veluti interpretem, & internuncium exhibuissem. Quod quamvis perleve officium videri possit, si vel ex sua, qua minima, vel ex Tua, quæ maxima est, dignitate spectetur, futurum tamen, ut Tibi probetur, plurimum suadet, tum Comitas Tua plane incredibilis, facilisque, & hominibus vel alienissimis patens ad Te aditus, tum mirificus ille amor, quo omne litterarum genus prosequeris. Non deerunt quidem, qui haud satis mihimet ipsi consuluisse judicabunt, quod opus satis breve, neque alia forsan re, quam argumentis commendandum excerpserim, tantoque nomine condecorare sim ausus. Verum tales ego homines non moror, qui judicium ex mole de Librorum præstantia ut plurimum ferunt. Id unum intelligant velim, aequi rerum æstimatores, si quos commentationes hasce legere non piguerit, non aliud mihi in animo fuisse consilium, quam ut in hujus Libri fronte publica quædam extaret observantiæ erga Te meæ tessera, atque monumentum. Neque metuo, si ea, qua decet, ratione mentem nostram interpretentur, quin consultissimum me in eo fuisse depradicent, quod mihi Patronum, studiisque meis comparaverim amplissimum, qui conatus nostros & humanitate fovere velit, & dignitate exornare quam maxime possit. Sive enim acerrimi reputem, qua polles, judicii Vim, omnigenam eruditionem, doctrinamque, sive animi Tui ad magna quæque præstanda ingenium considerem, atque in capessendis, administrandisque negotiis vel gravissimis prudentiam, qui tam varia virtutum genera felicius copularit, quique tam ad excolendas, quam ad augendas

Scien-

Scientias, Artésque sit aptior, haud facile inveniam. Nihil autem hic de antiquissima ARGENSONIÆ *Gentis nobilitate, nihil de summis, quibus in Gallia perfuncta est, honoribus dicam: nihil demum de bonorum generibus, quæ ita Vestra esse scio, ut & aliorum sint. Extra Te ista sunt, nihil in Te cultu dignius, quam Te ipsum judico: satis enim in Te babes, quo omnium oculos, mentesque in Tui admirationem pertrabas. Sed plura de Te nolo, ne sim molestus, longe siquidem abest, ut timeam, nequis vel assentationi, vel consuetudini datum esse aliquid suspicetur.*

A Te interim peto, Vir Nobilissime, ut me in fidem, & Clientelam Tuam admitti cupientem, perbumaniter amplecti velis, & labores meos pergas excipere pariter, atque tueri, ab eo veluti profectos, qui se studio, atque observantia Tui cedere nemini putat.

Dabam Veronæ die 15. *Augusti A.* 1767.



L E-

LECTORI S.



Gregia plane ſunt, quæ Mathematici complures de ſeriebus computandis tum naturalium numerorum, cum figuratorum, eorumque poteſtatum conſcripſere. Præſertim vero, quæ Bernoulli Jacobus habet in Arte ſua conjectandi, conſideratione quam maxime digna ſunt; methodum enim hujuſmodi ſeries in ſummam colligendi ſcientifica demonſtratione munitam exhibet, docetque præterea, quo pacto ſeries figuratorum analogæ ad homologas figuratas redigi, ac proinde ſummari queant.

Verum qui hactenus non modo figuratas ſeries, ſed univerſas, quas communi nomine Algebraicas poſt alios dicemus, unam eamdemque ſummandi rationem, directe ex termino generali aperuerit, & demonſtraverit geometrice, me certe latet.

Quare cum altero ab hinc anno methodum id generaliter præſtandi detexerim, facilem quidem, atque certiſſimis innixam fundamentis, Curvarum ope generis Parabolici, in eam veni ſententiam, ſtudioſos homines nequaquam ægre laturos, ſi quæ nactus ſum perbrevi Schediaſmate, ſatis tamen perſpicuo, in publicum protulero.

Eadem ipſa occaſione in alteram methodum incidi, quam etiamnum præ manibus habeo, & excolo, qua non modo algebraicas ſeries, de quibus hic ſermo eſt, verum etiam exponentiales omnes, aliaſque innumeras, ex dato termino generali, in ſummam faciliime redigo, quæque ab ea longe diverſa eſt, qua aureum ſuum de ſeriebus Commentarium condidit Celeber. Riccatus, & principio nititur admodum ſimplici, fæcundo tamen, & latiſſime patente: ſed eam, prout rei dignitas poſtulat, in peculiari Opere perſequar. Serierum contemplatio ei ſane videri poterit inutilis, qui Matheſim non niſi a limine ſalutavit. Verum aliter ſentiunt, qui perſpectum habent, quanti ſint in maxime arduis problematibus hujuſmodi præſidia, & quam late ſerierum uſus extendi poſſit, ſi probe excolantur.

OPUS.



OPUSCULUM I.

Nova Methodus geometrica Series Algebraicas in summam colligendi.

CAP. I.

§. 1. RECTA methodus postulat, ut antequam ad exponendam, series quascumque Algebraicas summandi rationem accedamus, termini serierum hujusmodi generalis investigatio præmittatur.

Neque in eo quidem actum agemus; nam id faciliori fortasse modo præstabimus, quam hactenus factum sit. Præstruamus itaque istiusmodi

LEMMA.

§. 2 Differentia constans cujuscumque Algebraicæ seriei æquatur facto ex coefficiente termini illius, in quo index x ad maximam evehitur potestatem in generali termino seriei, in terminos totidem progressionis numerorum naturalium 1, 2, 3 &c. inclusive ab unitate incipiendo, quantus est unitatum numerus in maximo ejusdem indicis exponente contentarum.

Esto $ax^{n} + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} \ldots\ldots + g$ terminus generalis omnium serierum Algebraicarum, in quo si series fuerit ordinis primi, est $n = 1$, si secundi $n = 2$, & ita porro. Sit igitur primum $n = 1$. erit $ax + g$ terminus genera-

neralis serierum primi ordinis, quæ differentias primas constantes habent. Formetur ex hoc termino series (A), ponendo loco x successive numeros naturales 1, 2, 3 &c.

(A) $a + g$, $2a + g$, $3a + g$ &c.
(B) a a &c.

Deinde series formatur differentiarum (B), priorem terminum a secundo subtrahendo, secundum a tertio, & ita deinceps, eritque quantitas a, sive $1a$ constans differentia seriei, cujus terminus Generalis $ax + g$.

Sit rursus $n = 2$, erit functio $ax^2 + bx + g$ terminus generalis serierum secundi ordinis.

Constituta ex ipsa serie (N), fiant series differentiarum (O), & (P).

(N) $a + b + g$, $4a + 2b + g$, $9a + 3b + g$ &c.
(O) $3a + b$ $5a + b$ &c.
(P) $2a$ &c.

eritque harumce serierum differentia constans $= 2a = 1 \cdot 2a$ Eodem modo si fiat $n = 3$, terminus generalis exurgit $ax^3 + bx^2 + cx + g$ serierum tertii ordinis, qui eadem ut ante ratione resolutus præbet series (R), (S), (V), (Z).

(R) $a + b + c + g$, $8a + 4b + 2c + g$ $27a + 9b + 3c + g$, $64a + 16b + 4c + g$ &c.
(S) $7a + 3b + c$ $19a + 5b + c$ $37a + 7b + c$ &c.
(R) $12a + 2b$ $18a + 2b$ &c.
(Z) $6a$ &c.

quarum ultima (Z) differentiam serierum tertii ordinis constantem præbet $= 6a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$

Cumque tali pacto ad altiores serierum ordines procedendo constans differentia quarti ordinis inveniatur $= 24a = 1\,2\,3\,4\,a$, quinti $= 120a = 1\,2\,3\,4\,5\,a$ &c patet constantem seriei cujuscumque Algebraicæ differentiam æquari facto ex coefficiente a termini illius, in quo index x ad maximam potestatem assurgit in generali termino, in totidem terminos progressionis 1, 2, 3 &c, inclusa unitate, quotus est numerus unitatum in ejusdem indicis exponente n contentarum.

PROBLEMA.

§. 3. Dato seriei cujusvis Algebraicæ ordinis n numero terminorum n, una cum eorumdem exponentibus quibuscumque,

& data

constanti differentia n.^{tima}, terminum seriei generalem definire.

Sunto termini dati P, Q, R, S &c. eorumque exponentes p, q, r, s &c., quibus scilicet exponitur, quotus sit quisque terminus in serie: sit vero D differentia seriei constans.

Fingatur terminum generalem esse

$$Z + xZ' + Z''x^2 + Z'''x^3 \ldots\ldots + Z^n x^n$$

in quo x est index, Z, Z', Z'' &c. sunt coefficientes determinandi.

Ponatur (§. 2.) coefficiens Z^n ejus termini in quo x ad maximam potestatem n evehitur æquale differentiæ datæ D per factum divisæ tot terminorum seriei naturalis, 1, 2, 3 &c. inclusa unitate, quotus est unitatum numerus in maximo exponente n ejusdem x contentarum, scilicet generatim

$$Z^n = \frac{D}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

Et quoniam tot sunt indeterminatæ Z, Z' &c. in termino generali fictitio, quot unitates in $n + 1$; jam earum una Z^n definita, tot adhuc determinandæ sunt, quotus est datorum terminorum P, Q, R &c. numerus.

Existentibus igitur P, Q, R &c. terminis datis, atque p, q, r &c. eorumdem exponentibus, hujusmodi æquationes conficiantur,

$$Z + Z'p + Z''p^2 \ldots\ldots + \frac{D}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} p^n = P$$

$$Z + Z'q + Z''q^2 \ldots\ldots + \frac{D}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} q^n = Q$$

$$Z + Z'r + Z''r^2 \ldots\ldots + \frac{D}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} r^n = R \text{ \&c.}$$

Quibus resolutis, inventisque valoribus coefficientium Z, Z', Z'' &c. atque in termino generali

$$Z + Z'x + Z''x^2 \ldots\ldots + \frac{D}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n$$

substitutis, prodibit seriei propositæ terminus generalis quæsitus.

§ 4. Unum, vel alterum exemplum in re per se manifesta exhibuisse sufficiat.

I Sunto -1, -1 bini termini seriei Algebraicæ secundi ordinis, sintque, si ita libet, consecutivi, septimus puta, & octavus in serie, & constans ejusdem seriei differentia secunda sit $\frac{1}{7}$. Quæritur hujusmodi seriei terminus generalis.

Quoniam est $P = -1$, $Q = -1$, $p = 7$, $q = 8$, $D = \frac{1}{5}$: erit $Z^{n} = Z'' = \frac{D}{1.2} = \frac{1}{10}$, & proinde æquationes resolvendæ

$$Z + 7Z' + \tfrac{49}{10} = -1$$
$$Z + 8Z' + \tfrac{64}{10} = -1$$

Quare erit $Z = \frac{23}{5}$, $Z' = -\frac{3}{2}$. Valoribus hisce in termino generali

$$Z + Z'x + \tfrac{1}{10}x^2$$

substitutis, exurget

$$\tfrac{23}{5} - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{10}x^2$$

Terminus generalis seriei, cujus septimus terminus $= -1$; octavus $= -1$, differentia autem constans $= \frac{1}{5}$, quemadmodum propositum erat.

II. Sunto termini 0, 22, 116 primus, tertius, & quintus in serie tertii ordinis; & differentia constans D ponatur esse $= 6$. Quæritur terminus generalis.

Erit itaque $P = 0$, $Q = 22$, $R = 116$, $p = 1$, $q = 3$, $r = 5$, $D = 6$, & $Z^{n} = Z''' = \frac{D}{1.2.3} = 1$. Quare enascentur hujusmodi æquationes.

$$Z + Z' + Z'' + 1 = 0$$
$$Z + 3Z' + 9Z'' + 27 = 22$$
$$Z + 5Z + 25Z'' + 125 = 116$$

quæ rite tractatæ præbebunt

$$Z = 1,\ Z' = -2,\ Z'' = 0$$

Si hosce valores in termino generali $Z + Z'x + Z''x^2 + x^3$ substituas, quæsitus emerget terminus generalis $1 - 2x + x^3$ seriei 0, 5, 22, 57, 116 &c, in qua propositæ conditiones reperientur.

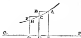
§ 5 Quare generatim in serie Algebraica, quæ habeat constantes differentias n finas, data seriei constanti differentia, & numero terminorum n, ad quodcumque datum in serie inter se intervallum collocatorum, terminus generalis definiri potest, & proinde series ipsa formari, quemadmodum ex præcedentibus perspicuum est.



Cap.

Cap. II.

§. 6. I. SI in Axe QP æqualia ſegmenta capiantur, cujuſmodi ſunt GD, DE &c., quæ unitate denotentur, atque in punctis G, D, E &c applicentur ad QP normales rectæ GH, DC, EA &c. æquales reſpective terminis ſeriei cu-



juſque, completis parallelogrammis DBAE, GFGD &c. deſignari concipiatur per hujuſmodi parallelogramma terminos ſeriei AE, CD &c

II Per puncta H, C, A &c. tranſeat linea HA, quam ſeriei ſedem nuncupabimus, atque per aream hujuſmodi lineæ ſeriem exprimi intelligatur, cujus termini ſunt quadrilinea ACDE, CHGD &c.

§. 7. Si itaque fiat quævis ordinatim applicata AE$=y$, atque abſciſſa QE$=x$, exiſtente x exponente termini generalis ſeriei, cujus terminus eſt ABDE, erit y æqualis functioni ejuſdem x, per quam terminus ipſe generalis exprimitur, & proinde æquatio exurget ejus lineæ naturam definiens, ad quam ſeries referri cenſetur.

Lemma I.

§ 8. Eſto x quantitas habita pro variabili, dx ejus differentiale, atque Ax^n functio quælibet Algebraica ejuſdem x rationalis, & integra; ſi multiplicetur Ax^n per dx, atque in

6

integrali $\int Ax^n dx$ ponatur $x-1$ loco x, & fubducatur, quæ prodit quantitas ab integrali $\int Ax^n dx$, & rurfus refiduum ab ipfa functione Ax^n auferatur. erit in expreffione, quæ ultimo exurgit, maximum variabilis x exponens, unitate minus exponente maximo, quo eadem x in functione data afficiebatur.

Etenim eft $\int Ax^n dx = \frac{A}{n+1} x^{n+1} \pm b$; quare ponendo $x-1$ loco x prodibit quantitas $\frac{A}{n+1}(x-1)^{n+1} \pm b$, quam fi ab $\frac{A}{n+1} x^{n+1} \pm b$ fubtrahas exurget $\frac{A}{n+1} x^{n+1} - \frac{A}{n+1}(x-1)^{n+1}$ Verum $\frac{A}{n+1}(x-1)^{n+1} = \frac{A}{n+1}(x^{n+1} - \overline{n+1}\,x^n + \frac{\overline{n+1}\,n}{1.2} x^{n-1} - \frac{\overline{n+1}\,n\,\overline{n-1}}{1.2.3} x^{n-2}$ &c).

Ergo $\frac{A}{n+1} x^{n+1} - \frac{A}{n+1}(x-1)^{n+1} = \frac{A}{n+1}(\overline{n+1}.\,x^n - \frac{\overline{n+1}\,n}{1.2} x^{n-1} + \frac{\overline{n+1}\,n\,\overline{n-1}}{1.2.3} x^{n-2}$&c.). Hanc igitur expreffionem fi ab Ax^n fubducas, prodit $\frac{A}{n+1}(\frac{\overline{n+1}\,n}{1.2} x^{n-1} - \frac{\overline{n+1}\,n\,\overline{n-1}}{1.2.3} x^{n-2}$ &c.), ubi maxima x poteftas eft $n-1$. Ergo &c

LEMMA II.

§. 9. In qualibet ferie terminus generalis æquatur fummæ omnium terminorum ufque ad x inclufive, demta fumma omnium terminorum ufque ad $x-1$ inclufive.

Per fe patet.

§. 10. Quare fi in formula fummæ generalis ponas $x-1$ loco x, fummam obtines terminorum ufque ad $x-1$ ${}^{\text{ultimum}}$; quam fi demas a fumma omnium terminorum ufque ad x ${}^{\text{ultimum}}$ nanciſceris terminum feriei generalem.

LEMMA III.

§. 11. Seriei terminorum æqualium A, A, A &c. fumma generalis æquatur Ax, facto fc. ex fpecie x, qua numerus terminorum indicatur in conftantem quantitatem A.

Eft per fe manifeftum.

Pro-

Problema Generale.

§. 12. Eſto (K) ſeries quæcumque Algebraica, in qua eſt A primus terminus, B ſecundus &c X terminus ſeriei generalis, ex indice x, & conſtantibus conflatus: ſeriei (K) ſummam generalem invenire.

(K) A+B+C+D......+X

Exiſtente X ſeriei termino Generali, erit X$=y$ æquatio lineæ HA ad quam ſeries referri cenſetur (7), atque ideo $\int dx$ X$=\int ydx$, Summa erit (6.11) ſeriei, cujus ſunt termini quadrilinea ACDE, CHGD &c. Inveniatur integrale $\int dx$.X, ita ut evaneſcat poſita $x=0$, in quo ſi loco x ponas $x-1$, atque id, quod emergit, ab eodem integrali ſubducas, terminus generalis exurgit (10) ſeriei, cujus ſunt termini quadrilinea ACDE, CHGD &c. Cum vero præter hujuſmodi terminum generalem, detur quoque terminus Generalis X ſeriei principalis, cujus ſunt termini ABDE, CFGD &c., ſi priorem ab altero demas, id quòd prodit eſt terminus Generalis ſeriei, cujus ſunt termini trilinea ABC, CFH &c., in quo index x ad poteſtatem evehitur unitate minorem quam in termino Generali X (8) præcipuæ ſeriei, quæ ſc. ſi fuerit ordinis n, erit ſeries hujuſmodi trilineorum ordinis $n-1$. Dicatur Z terminus Generalis inventus. Erit rurſus Z$=y$ æquatio lineæ FA, quæ ſedem ſeriei repræſentat (7), & $\int dx$.Z$=\int ydx$ erit ſumma ſeriei, cujus ſunt termini quadrilinea ACDE, CHGD &c. (6). In hujuſ-

hujusmodi integrali scribatur $x-1$ loco x, & formula, quæ exurgit, ab eodem integrali subducatur: terminus generalis prodibit seriei, cujus est summa $\int dx.Z$ (10). Si igitur hunc terminum generalem a priori Z subtrahas, terminum generalem nansciseris seriei ordinis $n-2$, cujus termini a trilineis ABC, CFH &c. repræsentantur (8). Rursus dicatur is V, & posito $V=y$, id ipsum, quod in superioribus, peragatur, atque ideo ad seriem ordinis $n-3$ devenire licebit. Tali autem pacto successive progredientes ad seriem ultimi ordinis perveniamus, in qua se exponens ejusdem x est unitas. Erit manifesto linea FA, ad quam referetur series, linea recta, ideoque terminus Generalis infimæ seriei, qui a consueta subtractione oriri debet, erit quantitas constans; conflatur enim eadem series ex trilineis ABC, CFH &c., quæ triangula sunt rectilinea, & inter se æqualia, existente FA recta linea. Ponatur P postremus hic terminus Generalis. Erit Px istiusmodi triangulorum æqualium summa (11) generalis.

Si igitur Areæ omnes in summam colligantur, erit

$$\int dx.X+\int dx.Z+\int dx.V \ldots\ldots +Px$$

Summa Generalis seriei

$$A+B+C+D\ldots\ldots+X$$

Q. E. Inv.

§. 13. Methodum aliquot exemplis illustremus.

I. Sit (A) terminus generalis omnium serierum ordinis secundi: quæritur hujusmodi serierum summa Generalis.

$$\text{(A)}\quad A+Bx+Cx^2$$

Si functionem (A) ad propriam sedem referas, prodit æquatio $A+Bx+Cx^2=y$, quæ est ad Parabolen Conicam, quemadmodum in subseq. Cap. demonstrabimus.

Erit itaque $Adx+Bxdx+Cx^2dx=ydx$, & integrando

$$\text{(M)}\quad Ax+\tfrac{1}{2}Bx^2+\tfrac{1}{3}Cx^3=\int ydx$$

Quæ formula prorsus evanescit, si fiat $x=0$.

Ponatur igitur in (M) $x-1$ loco x, & exurget (N).

$$\text{(N)}\quad Ax-A+\tfrac{1}{2}Bx^2-Bx+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{3}Cx^3-Cx^2+Cx-\tfrac{1}{3}C.$$

Si quantitas (N) a quantitate (M) subducatur, erit formula (P) terminus generalis seriei, cujus est summa generalis (M).

$$\text{(P)}\quad A+Bx-\tfrac{1}{2}B-Cx+Cx^2+\tfrac{1}{3}C.$$

Si

Si igitur terminus generalis (P) a generali termino (A) demas, residuum (Q) terminus erit generalis seriei trilineorum, cujusmodi sunt ABC, CFH

(Q) $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C+Cx$

Rursus terminus (Q) ad propriam sedem referatur, eritque æquatio $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C+Cx=y$ ad rectam IH.

Itaque $\frac{1}{2}Bdx-\frac{1}{2}Cdx+Cxdx=ydx$, atque integrando.

(R) $\frac{1}{2}Bx-\frac{1}{2}Cx+\frac{1}{2}Cx^2=\int ydx$, quod evanescit posita $x=0$.

Ponatur ideo in (R) $x-1$ loco x, & quod exurgit ab ipsa quantitate (R) dematur, eritque residuum (S) terminus generalis seriei, cujus summa est (R).

(S) $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C+Cx-\frac{1}{2}C$.

Si igitur terminum generalem (S) a termino generali (Q) subtrahas, erit $\frac{1}{2}C$ terminus generalis seriei triangulorum æqualium, cujusmodi sunt *qrp*, *pro* &c., quorum summa generalis est $\frac{1}{2}Cx$. Quare si in summam colligantur spatium Parabolicum (M), spatium Triangulare (R), atque $\frac{1}{2}Cx$: erit formula, quæ sequitur, summa generalis seriei propositæ (A)

$(A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C)x+(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)x^2+\frac{1}{3}Cx^3$

II. Esto (A) terminus generalis seriei tertii ordinis, tertiæ sc. numerorum naturalium potestates: quæritur summa generalis.

(A) x^3

Serie ad propriam sedem relata, fit $x^3=y$, æquatio ad primam Parabolen Cubicam

Quare $x^3dx=ydx$, & integrando (M) $\frac{1}{4}x^4=\int ydx$. Peracta in (M) substitutione $x-1$ loco x, & subducta formula inde enata ab ipsa functione (M), prodit quantitas $x^3-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{1}{4}$; qua demta a termino Generali (A), erit residuum (N) terminus Generalis novæ seriei ad suam sedem referendæ.

(N) $\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{4}$.

Locus igitur seriei erit hujusmodi $\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{4}=y$, Parabola scilicet Conica. Quare $\frac{3}{2}x^2dx-xdx+\frac{1}{4}dx=ydx$, & integrando (P) $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x=\int ydx$. Scribatur itaque in (P) $x-1$ loco x, & peracta ejus, quod exurgit, ab ipsa quantitate (P) subtractione, auferatur residuum a termino Generali (N). Prodibit terminus generalis $\frac{3}{2}x-1$, qui erit ad lineam rectam referendus tali pacto $\frac{3}{2}x-1=y$. Erit ideo $\frac{3}{2}xdx-dx=ydx$, & inte-

integrando (R) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x = \int y dx$. Iisdem, quæ ante, peractis, generalis prodit terminus constans $\frac{1}{4}$, cujus summa generalis $= \frac{1}{4}x$

Si igitur in summam colligas bina spatia Parabolica (M), & (P), spatium Triangulare (R), atque $\frac{1}{4}x$, summa generalis quæsita erit hujusmodi $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$.

III. Sit (A) terminus Generalis seriei cujus summa generalis investiganda est.

$$(A) \quad -1 + x - x^3$$

Si eadem, quæ in præcedentibus, methodus adhibeatur, terna, quæ sequuntur, exurgent spatia, sc. (B) $-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$, (C) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$, (D) $x - \frac{1}{2}x^2$; atque erit (E) $-\frac{1}{2}x$ summa triangulorum æqualium. Si igitur in unum colligantur Areæ (B), (C), (D), (E), summa prodibit generalis seriei (A), quæ sequitur

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

IV. Simili modo si investiganda proponatur summa generalis serierum omnium quinti ordinis, quarum terminus generalis hujusmodi formula continetur

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5,$$

dum eadem, quæ in superioribus, peragas, summam generalem nanciseeris

$$(A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{6}C - \tfrac{1}{30}E)x + (\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{4}D - \tfrac{1}{12}F)x^2 + (\tfrac{1}{3}C + \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{3}E)x^3 + (\tfrac{1}{4}D + \tfrac{1}{2}E + \tfrac{5}{12}F)x^4 + (\tfrac{1}{5}E + \tfrac{1}{2}F)x^5 + \tfrac{1}{6}Fx^6, \text{ \& }$$

ita porro.

Perspicuum est igitur nullam esse seriem Algebraicam, cujus summa generalis methodo nostra, ex dato generali termino, directe definiri non possit.

Cap. III.

§ 14. Nonnullæ ex præcedentibus profluunt circa serierum Algebraicarum indolem considerationes, quas hoc loco recensere non abs re fore judicamus. Usum enim non contemnendum habere possunt in seriebus interpolatione, vel in ejusmodi Problematibus commode resolvendis, in quibus de æquatione Curvæ invenienda agitur, quæ per quævis transeat, & quotvis in eodem plano puncta data. Constat itaque

1. Quod

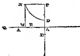
I. Quod series quæcumque Algebraica sedem in curva aliqua habeat generis Parabolici, ita ut si terminus generalis seriei ordinis p æquari ponatur indeterminatæ cuidam y, æquatio exurgat lineæ Parabolicæ gradus p, quæ terminos omnes complectitur seriei propositæ, quamque inter & seriem ipsam nexum quemdam arctum intercedere, videbimus infra. Excipe tamen series primi ordinis, quæ generali termino $A+Bx$ exprimuntur, utpote quæ ad sedem linearem relatæ, præbent æquationem $A+Bx-y=0$, quam non nisi ad rectam lineam pertinere, nemo unus per se se non cognoscit.

II. Quoniam vero circa series secundi ordinis peculiaria quædam adnotanda sunt, earumdem locum, Parabolam scilicet Apollonii, tali pacto construemus.

Esto (A) terminus generalis istiusmodi serierum

$$(A)\quad A+Bx+Cx^2$$

Sumta in recta QA abscissarum origine B, abscindatur BA $=\frac{B}{2C}$ positiva, vel negativa, prout fuerit quantitas $\frac{B}{2C}$ negativa, vel positiva; & ad rectam AQ ducta ad rectos angu-



los linea AP, ponatur $AD=A-\frac{B^2}{4C}$ supra rectam AQ, si fuerit $A-\frac{B^2}{4C}$ quantitas affirmativa, & infra AQ, si fuerit negativa. Si igitur ad Axem DP, vertice D, & latere recto $=$

$=\frac{1}{C}$ Paraboles Conica DN describatur, erit ea locus æquationis $A+Bx+Cx^2=y$.

Capta etenim quavis $BM=x$, MN ipsi AP parallela $=y$: erit $AM=x+\frac{B}{2C}$, & ducta PN parallela rectæ AQ, erit DP $=y-A+\frac{B^2}{4C}$. Verum ex natura Curvæ $\overline{AM}^2=DP.\frac{1}{C}$; ergo $\frac{B^2}{4C^2}+\frac{Bx}{C}+x^2=\frac{y}{C}-\frac{A}{C}+\frac{B^2}{4C^2}$, ideoque $\frac{A}{C}+\frac{Bx}{C}+x^2=\frac{y}{C}$, & $A+Bx+Cx^2=y$, quæ erat æquatio construenda.

Hinc colligere licet id omne, quod de poligonis numeris tantum demonstravit dudum Carreus in memorandis Acad. Sc. An. 1701, cuivis seriei Algebraicæ ordinis secundi plane competere, hujusmodi enim serierum, quotquot sunt, Apolloniana Paraboles locus est.

Præterquam quod una, eademque Parabola Conica, cujus sit latus rectum p, locus est semper seriei ordinis secundi, in qua coefficiens maximæ potestatis x in generali termino æquatur $\frac{1}{p}$, & factum ex eodem latere recto in constantem seriei differentiam, æquatur perpetuo uni eidemque quantitati.

Nam ex generali constructione præcedenti Curvæ parameter $p=\frac{1}{C}$, ideoque $C=\frac{1}{p}$, & est C coefficiens termini, in quo index x ad maximam potestatem evehitur in termino generali seriei. Ex iis vero, quæ Cap I. § 2 demonstravimus, constans differentia seriei cujusvis Algebraicæ æquatur facto ex coefficiente termini illius, in quo index x ad maximam effertur potestatem in termino generali in totidem terminos progressionis 1, 2, 3 &c. inclusa unitate, quotus est numerus unitatum in ejusdem indicis maximo exponente; si igitur in serie ordinis secundi fuerit d constans differentia, erit $2C=d$. Existente autem $C=\frac{1}{p}$, erit $d=\frac{2}{p}$, & factum dp ex constanti

diffe-

differentia seriei d in Parabolæ latus rectum p, erit æquale binario, uni se eidemque semper quantitati.

III. Neque id soli serierum Algebraicarum secundo ordini convenit; esto enim $x^n = p^{n-1} y$ generalis æquatio ad Parabolas primas, quæ quidem in infinitas alias transformari potest, prout Axis positio, mutua coordinatarum inclinatio, atque abscissarum origo mutationes innumeras subire possunt; erit $\frac{1}{p^{n-1}} x^n$ terminus generalis serierum, quæ ad easdem Curvas referri possunt. Quare posita d differentia constanti n.^{esima}, erit quoque $d = \frac{1.2.3 \ldots\ldots n}{p^{n-1}}$ (Cap. I), ideoque $dp^{n-1} = 1.2.3 \ldots\ldots n$. Si fuerit igitur $n = 2$, erit $dp = 2$, ut ante. Si $n = 3$, $dp^2 = 6$, si $n = 4$, $dp^3 = 24$, & ita deinceps.

IV. Alia insuper Conicæ Parabolæ peculiaris affectio ex superioribus manat, quam sane notatu dignam arbitror.

Si enim ad Axem hujusmodi Parabolæ, cujus sit latus rectum p ordinatim applicentur rectæ QO, AB &c. in progressione numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, &c. & ab umbilico N ducantur radii NO, NB &c., dum semiordinatæ ut numeri naturales progrediuntur, rectæ lineæ e foco eductæ progressionem Algebraicam secundi ordinis constituunt, cujus terminus generalis $(4x^2 + p^2) : 4p$.

Producatur Axis in H, ita ut NH dimidio lateri recto p æqualis sit, & ad Axim in H ducatur ad angulos rectos indefinita HC. Præterea a punctis O, B &c. ducantur Axi pa-

10

rallelæ OL, BC &c.; quæ partes abscindent HL, HC &c. in eadem numerorum naturalium progressione.

Itaque æquationem ad Parabolæ convexitatem ponatur esse $x^2 = pu$, & transferatur in H coordinatarum origo. Quoniam ex Conicis, existente HN semisse lateris recti, est ipsa HM quarta ejusdem lateris pars, si fiat $u + \frac{1}{4}p = y$, æquatio ad eamdem Parabolen in hanc transformabitur.

$$x^2 = py - \tfrac{1}{4}p^2.$$

Quare erit $\frac{p^2 + 4x^2}{4p} = y$. Locus est igitur Parabola MB seriei Algebraicæ cujus est terminus generalis $\frac{p^2 + 4x^2}{4p}$, existentibus sc. HL, HC &c. ut numeri naturales, LO, CB &c erunt termini seriei, cujus differentia secunda constans, quæque ejusmodi termino generali donabitur, quemadmodum ex superioribus liquet. Est autem ex doctrina Conicorum HC recta, lineæ sublimitatis, atque ipsæ LO, CB &c. æquantur rectis ON,



BN &c. a punctis O, B &c. ad focum ductis. Ergo ON, BN &c. seriem constituunt Algebraicam, cujus est functio $\frac{4x^2 + p^2}{4p}$ terminus generalis, id quod demonstrandum proponebatur.

V. Præterea progressus quidam alter deprehenditur, quo proprietas haud inelegans patet Curvarum omnium ad quas series Algebraicæ referri possunt. Et quoniam veritatum nexus facilius perspicitur, dum a prioribus, & simplicioribus ordiri licet.

licet: esto primum AB recta indefinita, in qua partes æquales sumantur *dc*, *cb*, *ba* &c. atque *ml*, *lf*, *fi* &c. quæ unitate denotentur, sitque eidem AB parallela recta quæpiam, cujusmodi est GF, vel utcumque inclinata, veluti IH, & a punctis *d*, *c*, *b*, *a*, atque *m*, *l*, *f*, *i* ducantur ad AB normales rectæ *dh*, *cg*, *bf*, *ae*, atque itidem rectæ *mq*, *lp*, *fo*, *in*.

Perspicuum est in primis parallelogramma C, D, E &c seriem quantitatum æqualium constituere. Similiter completis parallelogrammis *mr*, *lr*, *ft* &c., conficient eadem parallelogramma seriem Algebraicam primi ordinis. Seriem quoque primi ordinis conficient quadrilinea *qplm*, *pofl* &c., & seriem quantitatum æqalium triangula *qrp*, *pro* &c.

Ponatur modo ab IH Parabolen Conicam repræsentari. Tam parallelogramma *qrlm*, *psfl*, quam quadrilinea *qplm*, *pofl* seriem constituent ordinis secundi; trilinea vero Parabolica *qrp*, *pro* &c. seriem primi conficient.

Rursus IH Parabolen primam Cubicam repræsentet. Parallelogramma *qrlm*, *psfl* &c. & quadrilinea *qplm*, *pofl* &c. series erunt ordinis tertii, atque trilinea *qrp*, *pro* seriem secundi ordinis constituent; & ita deinceps.

Quare existente IH Curva quavis Parabolica, ad quam; scilicet series ordinis *n* referatur, tam parallelogramma *qrlm*, *psfl*, quam qradrilinea *qplm*, *pofl* seriem conficient ordinis *n*; trilinea autem *qpr*, *pro* seriem ordinis $n-1$ constituent. Spatiorum hujusmodi lex singularis, quæ ex generali Problemate pro summatione serierum Cap. II. exposito, sponte manat, non adeo indigna Curvarum Parabolici generis affectio mihi visa est, ut ab ea recensenda prorsus abstinerem.

VI.

11

VI. Sistit se se ultimo analogia quædam constantes inter differentias serierum, in quas proposita aliqua series summanda methodo nostra resolvitur, quam hoc loco memorare libet.

Si enim istiusmodi serierum constantes differentiæ, ordine, quo sunt enatæ sumantur, se habere inter se invicem in continua proportione dupla, facile deprehenditur: id quod tali pacto manifestum fiet.

Resumatur terminus generalis omnium serierum secundi ordinis $A+Bx+Cx^2$, quarum summam generalem Cap. præced. exhibuimus. Ad methodi processum attendenti patebit ultro series, in quas quæque resolvitur, sive earum terminos generales fore hujusmodi

I. $A+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B+(B-C)x+Cx^2$
II. $\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}C+Cx$
III $\frac{1}{2}C$

Differentia autem constans primæ seriei est $2C$ (§ 2); secundæ C, & quantitas constans, unde tertia constituitur, est $\frac{1}{2}C$, & est $2C:C=C:\frac{1}{2}C$, in continua sc. proportione dupla. Esto rursus $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ Generalis terminus serierum tertii ordinis. Dum summa generalis methodo nostra investigetur, serierum, quæ enascuntur, termini Generales sunt,

I. $A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-\frac{3}{4}D+(B-C+D)x+(C-\frac{3}{2}D)x^2+Dx^3$,
II. $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}D+(C-\frac{3}{2}D)x+\frac{3}{2}Dx^2$
III. $\frac{1}{2}C-\frac{3}{4}D+\frac{3}{2}Dx$
IV. $\frac{3}{4}D$

Est autem primæ diff constans $=6D$, secundæ $=3D$, tertiæ $=\frac{3}{2}D$ (§ 2), & quantitas constans ultimæ $=\frac{3}{4}D$

Et est $6D:3D=3D:\frac{3}{2}D=\frac{3}{2}D:\frac{3}{4}D$.

Eodem modo, cum termini generales serierum, in quas resolvuntur series quarti ordinis, quarum terminus Generalis $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$, sint

I. $A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-\frac{3}{4}D+\frac{1}{2}E+(B-C+D-E)x+(C-\frac{3}{2}D+2E)x^2+(D-2E)x^3+Ex^4$
II. $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}E+(C-\frac{3}{2}D+5E)x+(\frac{3}{2}D-5E)x^2+2Ex^3$
III. $\frac{1}{2}C-\frac{3}{4}D+\frac{5}{2}E+(\frac{3}{2}D-7E)x+3Ex^2$
IV. $\frac{3}{4}D-\frac{3}{2}E+3Ex$
V. $\frac{3}{2}E$.

Con-

Conſtans diff. primæ invenitur $=24E$, ſecundæ $=12E$, tertiæ $=6E$, quartæ $=3E$, & conſtans quantitas ultima $=\frac{3}{2}E$.

Se habet autem $24E:12E=12E:6E=6E:3E=3E:\frac{3}{2}E$, videlicet in continua proportione dupla.

Ergo ſi inductioni locus, lex eadem in aliis altioris ordinis ſeriebus deprehendi poterit.



OPUS-



OPUSCULUM II.

De æquationum cubicarum, & biquadraticarum Resolutione.



I indeterminata y æquari ponatur aggregato terminorum æquationis cujusque determinatæ, cujus est x quantitas incognita, æquatio exurgit ad aliquam ex ejusmodi lineis, quas Newtonus Parabolici generis dixit, quasque in præcedenti opusculo veluti serierum Algebraicarum sedes consideravimus. Sterlinghius in enumeratione linearum tertii ordinis Cap 6. eas primus ad numerum definiendum radicum immaginariarum in determinatis æquationibus adhibuit: Abbas vero de Gua in memorandis Ac. Sc. An. 1741. earumdem usum latius patere demonstravit, docuitque, quo pacto hujuscemodi Curvarum ope numerus quoque radicum realium positivarum, & negativarum determinetur.

In præsenti Opusculo id mihi institutum est, ut ostendam provehi ulterius posse harumce Curvarum considerationem, atque inde methodos erui, quibus radices ipsas, vel earum limites nanciscamur. Nuda serierum Algebraicarum contemplatio methodis hujusmodi facile comparandis nequaquam sufficere videtur. Quo quidem factum esse arbitror, ut Majerus, qui earumdem usum in detegendis æquationum radicibus in T. III. Com. Acad. Petrop. indicavit, meditationem, in quam commode inciderat, non excoluerit, id enim consilii tum mentem ejus haud subiit, ut easdem series inveheret in Geometriam. Simul ac enim a serie ad Curvam, ad quam series

re-

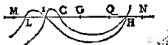
referri pôteſt, fit tranſitus, iſtiuſmodi radices non admodum inſtestigatu difficiles evadunt, curvæ progreſſu facem quodammodo præferente.

Ceterum utut verum ſit, quod Vir Doct innuit, ſeries tot interdum radices non detegere, quot æquatio gradus habet, non ideo, quemadmodum præpropere ſubdit, id indicio ſemper eſſe, in æquatione contineri radices aut æquales, aut imaginarias, videbimus infra.

Nos modo methodum tantum pro cubicis, & biquadraticis æquationibus condere conſtituimus; conceſſo autem otio, ulterius aliquando pergemus, in ea enim, haud diffitemur, nos eſſe ſententia curvarum harumce Paraboltcarum, earumque affectionum contemplationem ad radices æquationum determinatarum expiſcandas, ſuapte veluti natura conducere. Nam quod ad geometricas conſtructiones attinet, eæ quidem in praxi communi, quam hic præcipue reſpicimus, nullius fere eſſe uſus mihi videntur. Sed ad rem.

§. I.

Super MN tamquam Axe punctum ſumatur quodvis, veluti abſciſſarum origo, quodque perpetuo deſſignabimus litera O, atque abſciſſæ a puncto O dextrorſum affirmativæ, ſiniſtrorſum vero negativæ cenſeantur. Abſcindantur præterea hinc & inde ab origine O partes æquales OI, IM &c., nec-



non OQ, QN &c. quæ unitate denotentur. Si itaque in determinata aliqua æquatione, cujus incognita ſit x, ad nihilum reducta, ponatur loco ipſius O indeterminata quæpiam y, perſpicuum eſt, quod facta in eadem æquatione loco x, naturalium numerorum 0, 1, 2 &c. vel —1, —2 &c ſubſtitutione, diverſi ejuſdem y valores ſint orituri modo affirmativi, mo-

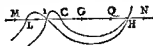
do negativi, atque etiam nulli. Quod si hujusmodi valoribus æquales statuantur respective in punctis O, I, M &c. Q, N &c. rectæ lineæ ad Axim MN perpendiculares, supra eamdem MN, si valores fuerit positivi, infra vero, si fuerint negativi, totidem exurgent ordinatim applicatæ ejus curvæ, cujus natura ab eadem æquatione definitur.

§. 2.

Hinc pronum est colligere

I. Tot futuras æquationis radices reales, in quot punctis Axim secuerit curva.

II Quoties vero binæ, quæ se mutuo consequuntur, applicatæ contrario signo afficiantur, toties curvæ transitum ab una in alteram regionem arguendum esse: quod cum fieri nequeat, quia in transitu Axim trajecerit linea, id esse necesse, ut cuique hujusmodi variationi, realis æquationis respondeat radix.



III Quare rationalis erit radix, si Axi occurrat curva in puncto aliquo divisionis, cujusmodi sunt M, I, Q &c; irrationalis vero si in punctum intermedium, puta L, C, H inciderat, quandoquidem ab omni fractione, & radicali liberata censetur æquatio, nulloque affecta coefficiente maxima incognitæ potestas.

IV. Limites ideo radicum irrationalium in numeris integris unitate tantum a se invicem differentes fore perspicuum est, aliosque proinde, quousque libuerit, arctiores eruere licebit.

§. 3

§ 3.

Hisce præhabitis, tres veluti Canones ex Algebra communi excerptos præsterno.

I. Canon. In qualibet æquatione cubica secundo termino carente, quæque æcumenica formula (A) exprimi potest, coefficiente p tertii termini existente affirmativo, vel si eodem coefficiente

$$(A)\ x^3+px+q=0$$

existente negativo, fuerit $\frac{1}{27}p^3$ minus quam $\frac{1}{4}q^2$, duæ radices sunt immaginariæ: si vero existente eodem coefficiente negativo fuerit $\frac{1}{27}p^3$ vel majus, vel æquale $\frac{1}{4}q^2$, nulla erit radix immaginaria, eruntque tres radices reales in priori casu omnes inter se inæquales, in secundo vero earum binæ inter se æquabuntur.

II. Canon. In quavis æquatione omnibus prædita radicibus realibus, tot insunt radices affirmativæ, quotus est in signis numerus permutationum a + in —, atque a — in +, negativæ vero quot sunt signorum consecutiones + +, vel — —.

III. Canon. In æquatione cubica (A) cujus sint binæ radices impossibiles, quæ remanet radix realis est vel affirmativa, vel negativa, prout ultimus æquationis terminus q signo negativo, vel affirmativo afficitur.

§ 4.

Esto itaque (A) $x^3+px+q=0$ generalis æquatio tertii gradus secundo termino destituta, cujus sunt radices investigandæ. Ope Canonis I. inquiratur utrum sint omnes radices reales: & præterea an statuta earumdem realitate, sint omnes inter se inæquales, aut earum aliquæ inter se æquentur: vel denique an una tantum insit in æquatione radix realis, duabus reliquis existentibus immaginariis.

I. Si radices fuerint omnes reales, & inæquales, quæratur ope Canonis II., quotus sit negativarum, vel positivarum radicum numerus, sintque duæ ex. gr. negativæ.

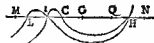
Peragantur itaque, quot opus erit, numerorum naturalium

loco x ſubſtitutiones in æquatione propoſita, ut occurſus cum Axe appareant ejus curvæ, ad quam æquatio $x^3+px+q=y$ pertinere cenſetur (§. 2)

Tres quidem caſus in hujuſmodi inveſtigatione contingere poſſunt.

Vel enim tres pateſiunt occurſus, vel duo, vel unicus apparet. Si primum: radices omnes æquationis in numeris integris, ſi fuerint rationales, vel earum limites unitate differentes, nanciſci licebit.

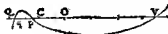
Si duo vero fuerint occurſus, veluti in H, & I, tertius neceſſario vel inter O, & I, vel inter I, & M contingere debet, binæ ſiquidem radices ſunt negantes ex hypotheſi. Cum vero deſit in æquatione ſecundus terminus, ita radices negativæ debent eſſe comparatæ, ut ſimul ſumptæ ipſi OH ſint æquales. Quare ubinam radix quæſita verſetur, facile erit di-



gnoſcere, ſitque in caſu noſtro inter puncta O, & I veluti in C. Ponantur ideo loco x fractiones aliquæ minores quam OI, ita ut ordinatim applicata y evadat poſitiva, tranſituſque appareat curvæ in alteram regionem, veluti eſt CI. Limites jam habebimus, intra quos radix OC conſtitui debet.

Unica deinde ſit, quæ ex numerorum integrorum ſubſtitutione prodit interſectio ex parte, ſi libet, poſitiva. Et quoniam tres ex hypotheſi ſunt radices æquationis reales, & inæquales, id indicio eſſe poteſt, curvam alicubi in parte negativa, indiſcernibili ſinuoſitate ex una in alteram regionem irrepſiſſe, bis Axim ſecando veluti in p, & q inter duo proxima

xima puncta; cujusmodi sunt C, Q, ita ut tam ex numeri integri OC, quam OQ, loco abscissæ x, substitutione, semper ordinatim applicata negativa exurgere debeat, & nulla proinde appareat intersectio. Si igitur consideres binas radices Op, Oq simul sumtas tertiæ jam inventæ æquari debere, ex hy-



pothesi, quos eligas fractos numeros facillime dignosces, ad hoc ut per eorum, loco x, substitutionem ordinata aliqua ad ramusculum curvæ pq pertinens, fiat positiva: inde enim limites radicum irrationalium Op, Oq eruere licebit, quemadmodum in exemplis patebit inferius.

II. Sint jam tres radices æquationis $x^3+px+q=0$ reales, atque earum binæ inter se æquentur.

Ope Can. II. investigetur quot sint radices æquationis positivæ, quotve negativæ, sintque, si ita libet, duæ negativæ, existente tertia positiva.

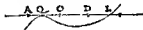
Perspicuum est easdem negativas radices inter se æquari debere, deficiente enim in æquatione secundo termino, unica radix positiva, binis æquivalet negativis simul sumtis, & duæ insuper radices esse debent inter se æquales ex hypothesi: necessario igitur eædem negativæ radices sibi invicem æquantur.

Peragantur itaque ut ante quot opus erit numerorum naturalium substitutiones loco x, ut radices quæsitæ emergere queant. Duo hic quoque casus contingere possunt. Etenim vel quæ apparebunt cum Axe intersectiones Curvæ duæ erunt, vel unica.

Si duæ fuerint, nulla amplius latere potest radix, veluti ex modo dictis liquido constat. Si vero unica prodierit intersectio, veluti in L, id est indicio alicubi in parte negati-

va,

va, inter bina divisionis puncta, puta in Q, Axi tali pacto curvam occurrere, ut punctum Q binis æquivaleat infinite proximis intersectionibus. Ubinam autem versetur id punctum Q ex eo conjicere licebit, quod radix OL æqualis esse debeat radici



OQ bis sumtæ, quandoquidem ex suppositione secundo termino caret æquatio.

Ergo limites duarum radicum æqualium facile detegentur.

III. Esto denique unica realis equationis radix, atque aliæ duæ immaginariæ. Prout itaque ultimus æquationis terminus signo positivo, vel negativo fuerit affectus, erit per Can. III. realis radix negativa, vel affirmativa. Constat igitur positivine an negativi esse debeant naturales numeri, loco x, substituendi, ut radix æquationis eliciatur.

§. 5.

I. Ex. sint radices investigandæ æquationis $x^3-3x+1=0$. Est itaque $p=-3$, $q=1$, & præterea $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$. Ergo (I. Can.) tres radices æquationis reales sunt, & inter se inæquales. Si igitur signorum combinatio consideretur juxta II. Can. unica esse debet radix negativa, duæ vero positivæ. Hoc posito ad Curvam Parabolicam referatur æquatio, eritque $x^3-3x+1=y$: & fiat $x=0=1=2$ &c: fit $y=1=-1=3$ &c.

Bis igitur Axim trancit Curva in parte positiva (§. 2. II.) atque intersectiones fieri inter puncta 0, 1, & inter 1, 2, deprehenditur.

Fiat itaque $x=-1=-2$ &c. fit $y=3=-1$ &c. Tertia igitur apparet sectio inter puncta -1, -2, in parte negativa. Ergo (§. 2.) radices omnes sunt irrationales, & radix mi-

minima limites habet o, & 1, media 1, & 2, maxima vero intra limites —1, —2 consistit.

II. Ex. Æquatio resolvenda sit $x^3-2x-1=0$. Est itaque $p=-2$, $q=-1$, & $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$; Quare radices omnes sunt reales, & inæquales (I. Can.), atque insuper binæ esse debent negativæ (II. Can.).

Ponatur ideo $x^3-2x-1=y$, fiatque $x=0=1=2$ &c. & erit $y=-1=-2=3$ &c. Ergo curva secat Axim inter puncta 1, 2 in parte positiva. Inventis radicis positivæ limitibus, fiat $x=-1=-2=-3$ &c. evadit $y=0=-5=-22$ &c. Altera ideo tantum apparet intersectio in ipso puncto —1.

Cum vero tres esse debeant radices æquationis inæquales, & duæ quidem negativæ, necessario (§ 4 I.) Curva in Axem incurrit inter puncta o, & —1, unica siquidem inventa radix intra limites 1, 2 ambabus negativis simul sumtis æqualis esse debet. Fiat igitur ex regulæ præscripto $x=-\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}$ &c. evadit $y=-\frac{1}{8}=\frac{1}{27}$ &c. Quare sectio est inter $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$. Trium itaque radicum inæqualium, quæ rationalis est equatur —1, duarum vero irrationalium limites sunt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, atque 1, 2, quemadmodum inveniendum erat.

III. Ex. Æquationis $x^3-7x-7=0$ radices invenire.

Quoniam est $p=-7=q$, erit $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, ideoque radices omnes æquationis (I Can.) reales erunt, & inæquales, atque duæ quidem erunt negativæ.

Ponatur itaque de more $x=0=1=2=3=4$ &c. fit $y=-7=-13=-13=-1=29$ &c. Radix igitur positiva intra limites 3, 4 consistere deprehenditur.

Cum vero nullus postmodum appareat curvæ transitus ex regione negativa in positivam, si numeri naturales negativi loco x substituantur; in tertium casum incidimus, quem §. 4. I. memoravimus. Ad radicem itaque positivam attendendo, utramque intersectionem intra limites —1, —2 necessario constitui, vel primo intuitu conjicere licet, deficiente enim termino secundo, binæ negativæ radices simul sumtæ, ipsi positivæ sunt æquales. Quare ponatur abscissa $x=-$[illegible], fit $y=$[illegible]

posi-

positiva. Constat igitur curvam in regionem positivam irrepsisse, Aximque secuisse inter puncta $-1, -\frac{5}{7}$. Fiat rursus $x = -\frac{12}{7}$, evadit $y = -\frac{111}{343}$ negativa. Regressa est ideo curva in regionem negativam, atque novam intersectionem inter puncta $-\frac{5}{7}, -\frac{12}{7}$ factam esse colligitur. Radicum igitur æquationis propositæ irrationalium minima intra limites $-1, -\frac{5}{7}$ constituitur, media intra limites $-\frac{5}{7}, -\frac{12}{7}$, maxima vero intra limites $3, 4$.

IV. Ex. Proponatur resolvenda æquatio $x^3 - 12x - 16 = 0$. Erit $p = -12, q = -16$, ideoque $\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4}$. Quare radices omnes æquationis reales erunt, atque duæ inter se æquabuntur (Can. I.). Cum vero duæ æquationis radices esse debeant negativæ (Can. II), erunt eædem etiam inter se æquales (§ 4 II) Fiat igitur $x = 0 = 1 = 2 = 3 = 4$ &c: applicata y fit $-16, -27, -32, -25, 0$ &c. Radix igitur positiva rationalis est, eaque quaternario æqualis.

Ponatur itaque $x = -1 = -1$ &c., fit $y = -5 = 0$ &c. Ergo ex parte negativa, curva Axem trajicit in puncto -2. Cum vero nullus amplius appareat curvæ occursus cum Axe, & duæ certe esse debeant radices æquationis æquales, & negativæ, bis in eodem puncto curvam Axi occurrere in parte negativa, censeri debet, intersectionibus infinite parum a se invicem dissitis.

Radices igitur sunt omnes rationales, maxima sc. positiva $= 4$, utraque vero negativa $= -2$.

§. 6.

Casus, quos resolutos regula nostra dedimus, quid in cujusvis cubicæ æquationis resolutione sit agendum, satis indicant; ostenduntque præterea, methodum substitutionis, omnium naturalissimam, dummodo rite tractetur, ad eruendas æquationum radices sibimet ipsi perabunde sufficere. Non equidem per divisores ultimi termini, ut moris est, tentanda est æquationis reductio, si qua enim radix insit rationalis, per regulam traditam elicitur certissime. Non casus, ut ajunt, irreductibilis moram parit, quandoquidem radicum irrationalium limites

tes

tes unitate tantum ad summum a se invicem differentes semper definire licet.

Neque substitutionum usus, aliquantulum exercitato tædium creare potest; etenim quisque per se videt haud esse necesse, ut a primis progressionis naturalis numeris ordinatim substitutio inchoetur, & prosequatur. Potest ea quidem ubique incipi, & per saltum etiam continuari; cumque præterea, vel ex sola æquationis attenta inspectione facile sit conjicere ubinam præter propter transitus curvæ ex una in alteram regionem contingere debeat, calculus mire contrahi potest. Adde, quod ex data æquatione series formari potest Algebraica, & per solam additionem quousque libet produci; potest etiam æquatio transmutari in aliam, quæ minores radices contineat. Quæ omnia ad methodi facilitatem facere nemo unus per se se non cognoscit.

§. 7.

Quod vero ad radices speciatim irrationales attinet, quarum vi methodi limites unitate differentes definiuntur, prostant jam diversæ ad veros earumdem valores appropinquandi rationes; attamen, quæ mihi præ ceteris commoda videtur, Newtoni est, quam in Libro de Methodo fluxionum esposuit, quaque Wolfius utitur in Probl. 172. Elem. Analis P. I.

Methodus summatim huc redit, ut alteruter capiatur radicis limes l, puta minor, atque eidem addjiciatur talis parvuscula quantitas u, ut $l+u$ ad veram radicem propius accedere, censeri possit. Si fuerit igitur x æquationis incognita, ponenda est quantitas $l+u$ loco x in eadem æquatione, ut in u exurgat æquatio. Verum existente u admodum exiguæ magnitudinis, rejici poterit ejusdem maxima potestas, utpote nulla præ ceteris in æquatione contentis, quo quidem fiet, ut in Cubicis æquationibus, quas præ manibus habemus, quadratica tantum resolvenda veniat.

Invento itaque valore ipsius u, si opus, quam proxime per decimales, limiti l addatur, eritque aggregatum radix æquationis propositæ a vera minus abudens, quam limes l. Rursus ut propius adhuc ad eamdem radicem accedatur, id ag-

gregatum veluti limes correctus haberi potest, atque eo ipso modo tractari, quo limes l, & tali quidem pacto ad veram radicem, quousque libuerit, appropinquare licebit.

Esto in unicum exemplum æquatio $x^3 - 45x + 100 = 0$, cujus radices definiendæ sunt.

Juxta regulas traditas inveniemus radices omnes esse reales, negativam unam, duasque positivas. Facta itaque $x = 0 = 1 = 2$ &c. fiet $y = 100 = 56 = 18 = -8 = -16 = 0$ &c.

Positivarum igitur radicum una est irrationalis, ejusque limites sunt 2, 3, altera vero rationalis, nempe $= 5$. Ponatur ideo $x = -4 = -6 = -7 = -8$ &c.; invenitur $y = 216 = 154 = 72 = -52$ &c. Ergo radix negativa intra limites $-7, -8$ consistere deprehenditur. Si pro radice irrationali positiva scribatur in æquatione $u + 2$ loco x, nanciscimus $u^3 + 6u^2 - 33u + 18 = 0$, in qua rejecta ipsius u maxima potestate, & resoluta æquatione $6u^2 - 33u + 18 = 0$ fit $u = 0.614$: quare radix æquationis irrationalis positiva evadit quamproxime $2 + 0.614 = 2.614$.

Eodem modo inveniemus negativam radicem irrationalem esse $= -7 - 0.724 = -7.724$

Quare radices æquationis propositæ sunt, quæ sequuntur.

$$x - 5 = 0$$
$$x - 2.614 = 0$$
$$x + 7.724 = 0$$

Eamdem hanc æquationem veluti casum irreductibilem resolvit diversa methodo Nicole Analista acutissimus in Actis Acad. Sc. 1744. Ed. Hol. p 460, atque hujusmodi exhibet radices,

$$x + V(58, \tfrac{11737}{100000}) = 0$$
$$x - \tfrac{1}{2}V(58, \tfrac{11737}{100000}) - \tfrac{1}{2}V(5, \tfrac{64179}{100000}) = 0$$
$$x - \tfrac{1}{2}V(58, \tfrac{11737}{100000}) + \tfrac{1}{2}V(5, \tfrac{64179}{100000}) = 0$$

Verum inter casus irreductibiles hæc æquatio haberi non potest, radicum siquidem positivarum una rationalis est, quod quidem Virum Doctissimum non animadvertisse videtur.

§ 8.

§. 8.

Hactenus regulam applicui ad æquationum cubicarum resolutionem: videamus modo quonam pacto ad biquadraticas applicari possit. Hoc haud facilius fieri posse judico, quam si harumce æquationum radices mediantibus cubicis eruantur, atque exprimantur. Tollendus est itaque primum secundus æquationis terminus, sitque generatim (A) $z^4+pz^2+qz+r=0$, quæ inde exurgit æquatio.

Fingatur æquationem (A) a multiplicatione duarum (B), (C) oriri, (B) $z^2+xz+t=0$, (C) $z^2-xz+s=0$, hoc est eamdem esse cum hac

$$z^4 \;*\; \begin{matrix}+sz^2\\-x^2\\+t\end{matrix} \begin{matrix}+sxz\\-tx\\ \end{matrix} +ts=0$$

Collatis terminis, valores nanciscimur assumtarum t, s per x datos, quos si in (B), & (C) substituas, & quadraticas resolvas, valores z exurgunt, per eamdem x, hujuscemodi.

$$\text{(M)}\quad \begin{cases} z=\frac{1}{2}x+\sqrt{(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2x})} \\ z=\frac{1}{2}x-\sqrt{(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2x})} \\ z=-\frac{1}{2}x+\sqrt{(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2x})} \\ z=-\frac{1}{2}x-\sqrt{(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2x})} \end{cases}$$

Et præterea emergit æquatio (F), quæ reducta nuncupatur.

$$\text{(F)}\quad x^6+2px^4 \begin{matrix}+p^2x^2\\-4r\end{matrix} -q^2=0$$

In qua si loco x^2 ponas y, vertitur in hanc gradus tertii,

$$y^3+2py^2 \begin{matrix}+p^2y\\-4r\end{matrix} -q^2=0$$

E 2 cujus

cujus terminus secundus tolli potest, & proinde radix y per regulas traditas facillime extrahi. Habita hujusmodi radice vera, si fuerit rationalis, vel prope veram (§ 7), si fuerit irrationalis, regrediendum erit, atque valor indeterminatæ x erui debebit, quo in formulis (M) substituto, radices æquationis (A) definire licebit.

In ejusmodi autem investigatione ad sequentes Canones attendendum erit, quos ex communi Algebra depromsimus.

I. Radices æquationis quarti gradus, vel sunt omnes reales, vel omnes immaginariæ, vel duæ sunt reales, & duæ immaginariæ.

II. Si æquatio cubica ad quam redigitur æquatio (F) unica radice reali sit prædita, æquatio (A) binas tantum reales radices continebit, duabus reliquis existentibus immaginariis.

III. Si ejusdem vero cubicæ æquationis fuerint omnes radices reales, æquatio (A) radices habebit vel omnes reales, vel omnes immaginarias. Reales quidem radices erunt, si terminus secundus reductæ (F) signo negativo afficiatur, existente tertio positivo; immaginariæ autem si deficiente termino secundo in æquatione (A), habuerit ejus reducta (F) terminum secundum positivum, aut secundum, & tertium simul negativos.

§ 9.

Hisce præhabitis, unum, vel alterum exemplum proferre non inutile judicamus.

Ex. I.

Et primum quidem sit æquatio (B) $z^4+3z^2-52z+48=0$. Collatis hujus terminis cum omologis canonicæ (§ 8) invenitur $p=3$, $q=-52$, $r=48$. Substitutis hisce valoribus in Canonicæ reducta (F), vertitur illa in hanc $x^6+6x^4-183x^2$

-2704

$-2704=0$, in qua si ponas $x^2=y-2$, obtines cubicam æquationem (C), secundo termino carentem.

(C) $y^3-195y-2322=0$.

Vi Canonis I. §. 3. duæ insunt in æquatione (C) radices immaginariæ: ergo per Can. II. §. 8. duæ radices æquationis (B) sunt reales, atque duæ immaginariæ. Cum vero æquationis (C) radix realis sit positiva, per III. Can. §. 3., & facile videre sit minorum numerorum substitutiones prorsus inutiles esse, per ea, quæ §. 6. diximus, fiat $y=10=16=18$ &c., & invenietur applicatam curvæ ad quam æquatio (C) refertur, fieri $=0$, ubi est abscissa $y=18$. Radix igitur quantitas rationalis est, atque eidem numero 18 æqualis. Regrediendo igitur, valorem nanciscimur $x=\sqrt{(y-2)}$, $=\sqrt{16}=4$; quo in formulis (M) §. 8. substituto, radices reales æquationis propositæ (B) emergent hujusmodi $z=2\pm\sqrt{(-4-\frac{1}{3}+\frac{16}{3})}=2\pm1$, atque binæ immaginariæ erunt $z=-2\pm\sqrt{-22}$.

II. Ex.

Sit æquatio (P) $z^4-18z^2+z+70=0$, quam si cum Canonica conferas, prodit $p=-18$, $q=1$, $r=70$. Substitutis in reducta Canonicæ hujusmodi valoribus, evadit (N) $x^6-36x^4+44x^2-1=0$.

Scribe $t+12$ loco x^2: æquatio cubica exurget secundo termino mulctata (O) $t^3-388t-2929=0$. Cum vero sit in æquatione (O) $\frac{\overline{388}^{\,3}}{27} > \frac{\overline{2929}^{\,2}}{4}$, radices omnes erunt reales, atque inæquales (Can. I. §. 3.), atque duæ quidem negativæ (Can. II. ibid.). Est autem reductæ (N) terminus secundus negativus, tertius vero positivus: ergo per Can. III. §. 8. radices omnes æquationis (P) erunt reales. Inveniatur itaque radix una æquationis (O) per methodum ante traditam, ponendo sc. $t=20=22=23$ &c.; valor applicatæ fit successive -2689, -817, $+314$ &c.: quare radix positiva irrationalis est, & intra limites 22, 23 consistere deprehenditur.

Si

Si methodus §. 7 indicata in usum vocetur, eadem radix positiva quam proxime fiet 22 . 74. Regrediendo igitur, erit $x^2 = t + 12 = 34 . 74$, ideoque $x = 5 . 894$; quo valore in formulis (M) §. 8 substituto, radices æquationis propositæ (P) erunt, quæ sequuntur · 3 . 426; 2 . 467; — 3 . 579; — 2 . 315.

Id quod in hujusce methodi illustrationem attulisse sufficiat.



OPUS-



OPUSCULUM III.

De Cissoide quadam a Dioclea diversa,

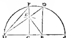
§. 1.



I in circumferentia circuli AGD punctum fumatur quodlibet G, a quo ad diametrum ducatur normalis GB, junctaque GD, super GD ad angulos rectos cadat recta linea BE, locus punctorum E linea est, quam *Cissoidem Lemnisceroticam* dico.

§. 2.

Iisdem positis, si per quodvis Cissoidis punctum E ducatur ipsi GB parallela FC, & jungatur DF, rectæ lineæ DF,

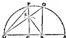


DE, DC funt in continua proportione, & proinde rectæ DF, DB funt fibi invicem æquales; est enim AD DF=DF.DC, ex geometricis, & ob angulum rectum BED est itidem BD:

DE

DE$=$DE:DC; quare $\overline{DF}^2=$AD . DC , & $\overline{DE}^2=$BD . DC . Se habet igitur $\overline{DF}^2:\overline{DE}^2=$AD. DC:BD.DC$=$AD:BD.

Rursus est AD:DG$=$DG:DB, ideoque AD:DB$=\overline{DG}^2$: $\overline{DB}^2$: ergo $\overline{DF}^2:\overline{DE}^2=\overline{DG}^2:\overline{DB}^2$, & DF:DE$=$DG:DB. Et



est DG:DB$=$DE : DC , propter similia triangula DGB, DFC; se habet igitur DF : DE$=$DE : DC ; sed est etiam DB: DE$=$DE DC. Sunt igitur rectæ lineæ DF, DB sibi invicem æquales . Q. E. D.

§ 3.

Fiat itaque DC$=x$, CE$=y$, AD$=2a$. Et quoniam $\overline{FD}^2=$AD.DC, & ex præcedenti Theoremate FD DC$=\overline{DE}^2$: erit $x\sqrt{2ax}=y^2+x^2$, & æquatio naturam Curvæ definiens erit

$$(A)\ y^4+2x^2y^2+x^4-2ax^3=0$$

quæ ad quartum ordinem referri debet .

Posita $y=0$, abscissa quatuor induit valores reales, scilicet $x=2a=0=0=0$ Curva igitur Axim trajicit in A , existente DA$=2a$, tresque sectiones in ipsa coincidunt abscissarum origine D: quare indoles puncti D definienda est . Ex prima quidem fluxione æquationis (A), fit

$$2y^3dy+2y^2xdx+2x^2ydy-3ax^2dx+2x^3dx=0$$

Verum substitutis coordinatarum valoribus, quæ ad punctum

D per-

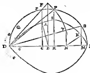
D pertinent, scilicet $x=0, y=0$, expressio evanescit. Sumatur itaque secunda fluxio, prout methodus in hujusmodi casibus requirit, eritque

$$3y^2dy^2+y^2dx^2+4yxdxdy+x^2dy^2-3axdx^2+3x^2dx^2=0$$

sed in hac quoque substitutis valoribus $x=0, y=0$, tota evanescit quantitas: quare sumta tertia fluxione, fit

$$2ydy^3-adx^3+2xdx^3+2ydydx^2+2xdxdy^2=0$$

in qua si ponas $x=0$, $y=0$ exurgit $-adx^3=0$, ideoque $dx=0=0$. Tres igitur in D respondent tangentes rectæ reales, æquales, ejusdemque signi, quæ in unicam Axi perpendicularem coalescunt. Est itaque D punctum triplex, cum



eo conveniens, quod Cl. Bragelgue Lemnisceros, cujusmodi est $Dabc$, evanescens vocat.

§. 4.

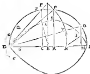
In puncto I. unica est tangens, eaque applicatis parallela, nam primum differentiale æquationis (A) vertitur in æquationem (B) $\frac{dy}{dx}=\frac{3ax^2-2x^3-2y^2x}{2y^3+2x^2y}$, in qua si ponas $x=2a$, $y=0$, fit $\frac{dy}{dx}=-\frac{4a^3}{0}$.

 §. 5.

§. 5.

Ad aliud vero quodcumque curvæ punctum facillime ducuntur contingentes rectæ tali pacto.

Sit A punctum Lineæ, ad quod ducenda est tangens. Super Axim ID describatur circulus IED, atque per A applicetur ad ID normalis EC. Juncta DE, productaque usque donec fiat DF$=\frac{3}{4}$ID, a puncto F ducatur ipsi EC æquidistans FB, & jungatur BA. Erit ipsa BA curvæ normalis in puncto A, & recta linea ipsi BA perpendicularis in A Cissoidem continget in puncto A; ex similitudine enim triangulorum DEC, DFB est DE : EF = DC : CB, vel DE : DF—DE = DC : CB, & multiplicando binos priores terminos per DC, erit DE . DC : (DF—DE) DC = DC : CB. Verum si ducta intelligatur recta



DA, sunt DE, DA, DC continue proportionales (§. 2.) ideoque $\overline{DA}^2 = DE . DC$; quare erit $\overline{DA}^2 : DF . DC - \overline{DA}^2 = DC : CB$. Existente autem $DC = x$, $CA = y$, $DI = 2a$, est $\overline{DA}^2 = y^2 + x^2$, $DF = \frac{3}{4}DI = \frac{3}{2}a$. Ergo $y^2 + x^2 : \frac{3}{2}ax - y^2 - x^2 = x$: ad quartam BC, eritque $BC = \frac{3ax^2 - 2y^2x - 2x^3}{2y^2 + 2x^2}$; quæ formu-

la

la cum valor sit ipsius $\frac{ydy}{dx}$, h. e. rectæ subnormalis ex æquatione (B) depromtus, patet fore rectam ipsi QA perpendicularem in A, tangentem curvæ quæsitam in puncto A.

§. 6.

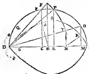
Quoniam vero DF est quantitas constans, centro D, intervallo DF describatur circulus, priori circulo IED occurrens in P, & ad ID ducatur normalis PR. Tangens Cissoidis in puncto S erit Axi ID parallela, applicata vero SR omnium maxima; existente enim subnormali BC quarta proportionali ad rectas DE, EF, DC, in puncto P fit EF=o, ideoque & subnormalis BC=o. Ipsa igitur applicata SR curvæ normalis est in S; ultra vero punctum S subnormalis evadit negativa, uti patet. Quare a D usque ad S crescunt applicatæ crescentibus x, ultra vero crescentibus itidem x, applicatæ minuuntur. Igitur in S fit maxima. Ut id vero etiam ex methodo communi exurgat, in æquatione differentiali (B §. 4.) fiat $dy=0$; fit $3ax-2x^2-2y^2=0$, h. e. existente $y^2+x^2=x\sqrt{2ax}$ (I), fit $3a=2\sqrt{2ax}$, atque ideo $x=\frac{9}{8}a$, quæ maximæ RS respondet; id quod ex constructione nostra prono alveo fluit. Nam ex natura circuli, $DR=\frac{\overline{DP}^2}{ID}$; DP autem est $\frac{3}{2}a$, $ID=2a$; quare $DR=\frac{9}{8}a$, quemadmodum ex methodo de maximis, & minimis constitutum fuit.

§. 7.

Proprietas hinc curvæ nostræ manat non inelegans, quam sic enunciabimus. Subtensa quælibet circuli genitoris ab Axis origine D computata se habet ad compositam ex abscissa, & subnormali in Cissoide, sive ad earumdem differentiam in constanti ratione: & ad compositam quidem si arcus circuli sumantur minores, quam DP, ad differentiam vero, existente arcu circuli majore, quam DP. Utrumque demonstrabimus tali pacto, & primum quidem sic.

Quoniam est FD : BD=ED : DC=ID : DE, erit permutando FD : ID=BD : DE ; & est FD=$\frac{3}{4}$ID ex superioribus. ergo BD=$\frac{3}{4}$DE, & resolvendo DE : BD=4 : 3, in constanti sc. ratione.

Alterum vero ita componetur Ducatur DO, quæ circulum FPT secet in T, atque ordinatim applicetur OM Cissoidi occurrens in K, ductaque TN ipsi OM æquidistante,



jungatur KN, quæ erit curvæ normalis in K, quemadmodum patet ex præcedentibus, eritque DN abscissæ, & subnormalis differentia. Eodem itaque modo demonstrabitur esse DN =$\frac{3}{4}$DO : quare resolvendo DO : DN=4 : 3, h. e. in constanti ratione Hinc altera, & facillima quidem colligitur tangentes ad Cissoidem nostram ducendi ratio.

§ 8.

Sumatur præterea secunda semiordinatæ fluxio, quæ erit hujusmodi, $ddy=\frac{dx^2(2a\sqrt{x}-3a2\sqrt{a})}{(16ax-8x\sqrt{2ax})\sqrt{(\sqrt{2ax}-x)}}$, & fiat $ddy=0$. Erit $2a\sqrt{x}=3a\sqrt{2a}$, h. e. $x=\frac{9}{2}a$, quo valore in æquatione curvæ resoluta $y=\pm\sqrt{(x\sqrt{2ax}-x^2)}$ substituto, evadit y immaginaria : quare ex hac suppositione nullibi adesse flexum,

vel

vel regressum curvæ colligitur. Ponatur igitur $ddy = \infty$; fit $(16ax - 8x\sqrt{2ax})\sqrt{(\sqrt{2ax} - x)} = 0$, ideoque $x = 2a$. Quo valore in præcedenti æquatione substituto fit $y = 0$: quod tangentem tactum in puncto I ordinatis fieri parallelam, veluti antea inventum erat (4), indicio est.

Hoc insuper ex secunda semiordinatæ fluxione, tamquam ex genuino criterio, conjicere licet, curvam perpetuo Axi concavitatem obvertere. Prout enim valor ddy est negativus, vel positivus, curva est ad Axim concava, vel convexa. In casu autem nostro, quicumque substituatur valor in æquatione $ddy = \frac{dx^2(2a\sqrt{x} - 3a\sqrt{a})}{(16ax - 8x\sqrt{2ax})\sqrt{(\sqrt{2ax} - x)}}$, loco x, intra limites o, & $2a$ constitutus (quos quidem prætergredi non licet, quin in applicatas immaginarias incidatur), fractionis numeratore existente semper negativo, denominator est positivus, ideoque valor ddy semper negativus.

Quare tuto statui potest Cissoidem nostram continua curvatura progredi, atque ovalis instar in se redire, h. e. in definito spatio contineri, talemque esse quam proxime, qualem in schemate adumbravimus.

§ 9.

Quod vero ad ejusdem quadraturam attinet, pendet ea quidem a circuli Tetragonismo.

Posita enim in curvæ æquatione $x = \frac{z^2}{2a}$, fit $y = \frac{z}{2a}\sqrt{2az - z^2}$, atque elementum spatii ydx evadit $\frac{1}{2a^2}z^2dz\sqrt{2az - z^2}$. Ut facillime formula hæc integrari possit constituatur hujusmodi Canon generalis. Sumatur differentiale formulæ $z^n\sqrt{(2az - z^2)}$, eritque Diff. $z^n\sqrt{(2az - z^2)} = \frac{\overline{2an + a}\,.\,z^n dz}{\sqrt{(2az - z^2)}} - \frac{\overline{n+1}\,.\,z^{n+1}dz}{\sqrt{(2az - z^2)}}$.

Quare erit (P) $\frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{(2az - z^2)}} = \frac{\overline{2an + a}\,.\,z^n dz}{\sqrt{(2az - z^2)}} - \text{Diff.}\frac{z^n\sqrt{(2az - z^2)}}{n+1}$,

Hoc posito, elementum spatii Cissoidalis multiplicetur, & dividatur per $V(2az-z^2)$, ut adipiscatur hanc formam (A) $\frac{\frac{1}{a}z^3dz}{V(2az-z^2)}$ — (B) $\frac{\frac{1}{2a^2}z^4dz}{V(2az-z^2)}$; ponatur deinde in formula (P) $n=3$, fietque $\frac{z^4dz}{V(2az-z^2)} = \frac{7az^3dz}{4V(2az-z^2)}$ — Diff. $\frac{1}{4}z^3V(2az-z^2)$; posita vero successive $n=2=1=0$, fit $\frac{z^3dz}{V(2az-z^2)} = \frac{5az^2dz}{3V(2az-z^2)}$ — Differ. $\frac{1}{3}z^2V(2az-z^2)$, $\frac{z^2dz}{V(2az-z^2)} = \frac{3azdz}{2V(2az-z^2)}$ — Diff. $\frac{1}{2}zV(2az-z^2)$, $\frac{zdz}{V(2az-z^2)} = \frac{adz}{V(2az-z^2)}$ — Diff. $V(2az-z^2)$. Redigitur ideo formula (A) ad hanc formam $\frac{5a^2dz}{V(2az-z^2)}$ — Diff $(\frac{5a}{2}+\frac{5z}{6}+\frac{z^2}{3a})$ $V(2az-z^2)$; formula vero (B) ad hanc $\frac{35a^2dz}{16V2az-z2}$ — Diff $(\frac{35a}{16}+\frac{35z}{48}+\frac{7z^2}{24a}+\frac{z^3}{8a^2})$ $V(2az-z^2)$: quare $\frac{1}{2a^2}z^2$

$$dzV(2az-z^2) = \frac{\frac{1}{a}z^3dz}{V(2az-z^2)} - \frac{\frac{1}{2a^2}z^4dz}{V(2az-z^2)} = \text{Diff.}\,(\frac{z^3}{8a^2}$$

$-\frac{z^2}{24a}-\frac{5z}{48}-\frac{5a}{16})\ V(2az-z^2)+\frac{5}{8}\cdot\frac{a^2dz}{2V(8az-z^2)}$. Existente igitur $\frac{a^2dz}{2V(2az-z^2)}$ elemento Sectoris Circularis, altera vero formula prorsus integrabili, manifestum fit Cissoidis nostræ quadraturam a circulari pendere, quemadmodum innueram.

§. 10.

§. 10.

Rectificatio autem curvæ haberi non potest, nisi Arcus Elliptici, & hiperbolici rectificentur, quod quidem tali pacto conficiemus.

Quoniam est $dy = dx . \frac{3a - 2\sqrt{2ax}}{2\sqrt{(2a\sqrt{2ax} - 2ax)}}$, erit $dy^2 = dx^2 \frac{(3a - 2\sqrt{2ax})^2}{8a(\sqrt{2ax} - x)}$; quo valore in formula communi rectificationum $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituto, mutatur illa in hanc $dx \sqrt{(\frac{9a - 4\sqrt{2ax}}{8(\sqrt{2ax} - x)})}$. Fiat $z = \sqrt{2ax}$; arcus Cissoidici elementum induit hanc formam $\frac{1}{2a} zdz \sqrt{(\frac{9a^2 - 4az}{2az - z^2})}$. Paretur formula hoc modo $\frac{1}{2a} . dz \frac{\sqrt{(9a^2 z - 4az^2)}}{\sqrt{(2a - z)}}$, deinde fiat $2a - z = u^2$: erit $-dz = 2udu$, & formula in hanc transformabitur $-\frac{1}{a} du \sqrt{(2a^3 + 7a^2u^2 - 4au^4)}$. Fiat multiplicatio, & divisio per $\sqrt{(2a^3 + 7a^2u^2 - 4au^4)}$, eritque elementum $= -\frac{1}{a} du \frac{2a^3 + 7a^2u^2 - 4au^4}{\sqrt{(2a^3 + 7a^2u^2 - 4au^4)}}$. Cum vero quantitas sub signo radicali resolubilis sit in binomia realia $2a^2 - au^2$, $a + 4u^2$, eadem quantitas vertitur in hanc $\frac{4u^4du}{\sqrt{(2a^2 - au^2)} . \sqrt{(a + 4u^2)}} - \frac{2a^2du}{\sqrt{(2a^2 - au^2)} \sqrt{(a + 4u^2)}} - \frac{7au^2du}{\sqrt{(2a^2 - au^2)} . \sqrt{(a + 4u^2)}}$. Hisce præmissis, quæro differentiale quantitatis $u \sqrt{(2a^3 + 7a^2u^2 - 4au^4)}$, quod est $du \frac{2a^3 + 14a^2u^2 - 12au^4}{\sqrt{(2a^2 - au^2)} . \sqrt{(a + 4u^2)}}$: quare erit $4 . \frac{u^4du}{\sqrt{(2a^2 - au^2)} . \sqrt{(a + 4u^2)}} = -$ Diff $\frac{u}{3a} \sqrt{(2a^3 + 7a^2u^2 - 4au^4)} + \frac{1}{3} du \frac{2a^2 + 14au^2}{\sqrt{(2a^2 - au^2)} . \sqrt{(a + 4u^2)}}$. Substitutionibus igi-

tur

tur rite peractis fit curvæ elementum —Diff. $\frac{u}{3a}\sqrt{(2a^3+7a^2u^2-4au^4)} - \frac{\frac{4}{7}a^3du}{\sqrt{(2a^2-au^2)}.\sqrt{(a+4u^2)}} - \frac{\frac{7}{4}au^2du}{\sqrt{(2a^2-au^2)}.\sqrt{(a+4u^2)}}$.

Est autem $-\frac{\frac{4}{7}a^2du}{\sqrt{(2a^2-au^2)}.\sqrt{(a+4u^2)}} = -\frac{2}{27}du\frac{\sqrt{(2a^2-au^2)}}{\sqrt{(a+4u^2)}} - \frac{4}{27}adu\frac{\sqrt{(a+4u^2)}}{\sqrt{(2a^2-au^2)}}$, & $\frac{-\frac{7}{7}au^2da}{\sqrt{(2a^2-au^2)}.\sqrt{(a+au^2)}} = \frac{7}{27}du\frac{\sqrt{(2a^2-au^2)}}{\sqrt{(a+4u^2)}} - \frac{14}{27}adu\frac{\sqrt{(a+4u^2)}}{\sqrt{(2a^2-au^2)}}$: ergo si hujusmodi valores in præcedenti expressione substituas, idem curvæ elementum in hanc vertitur quantitatem, —Diff. $\frac{u}{3a}\sqrt{(2a^3+7a^2u^2-4au^4)} - \frac{5}{7}du\left\{(B)\frac{\sqrt{(2a^2-au)}}{\sqrt{(a+4u^2)}} + (C)\frac{2a\sqrt{(a+4u^2)}}{\sqrt{(2a^2-au^2)}}\right\}$.

Formula igitur eo perducta est, ut a binis (B), & (C) pendeat ad Canonicam redactis Celeb. Viri Vincentii Riccati, quæ in 11. Tom. Opusc. extat, quæque Ellipsi, & Hiperbola rectificatis integratur.

§. 11.

Missis complurimis aliis Cissoidis nostræ affectianibus, quæ vel calculo, vel compositione non difficulter erui possunt, eam præcipue curvæ proprietatem persequi in animo est, qua nititur cubi duplicatio, sive binarum mediarum proportionalium inventio, illud sc. decantatissimum antiquitatis problema.

Sint itaque AD, DO rectæ lineæ, inter quas duæ mediæ geometrice proportionales reperire propositum sit.

Super maxima AD tamquam Diametro Circulus describatur AFD, sitque AEOD Cissois nostra super AD descripta; minima vero DO a puncto D ad Cissoidem applicetur, eidemque occurrat in O. Per O ducatur recta DF, ductaque FC ad diametrum AD perpendiculari, Cissoidi occurrente

in

in E, per E ducatur DG, & rectæ FC parallela GB; juncta præterea CO, ducatur Cissoidis applicata OP. Itaque ex curvæ genesi (1) perspicuum est rectam lineam CD normalem esse rectæ DF in puncto O. Est autem ex Geometriæ elementis DF recta media proportionalis inter AD, & DC, & est ex Theoremate nostro recta DB æqualis ipsi DF.

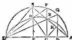
Quare AD : DB = DB : DC. Eodem modo demonstrabitur esse AD : DC = DC : DP; est igitur AD : DC = $\overline{DB}^2 : \overline{DC}^2$ = DC : DP. Verum DC : DP = $\overline{DC}^2 : \overline{DO}^2$ ob angulum rectum CDD; ergo $\overline{DB}^2 : \overline{DC}^2 = \overline{DC}^2 : \overline{DD}^2$, ideoque DB : DC = DC : DD; & est AD : DB = DB : DC. Ergo AD : DB = DB : DC = DC : DO. Sunt igitur rectæ AD, DB, DC, DO in continua proportione, atque ideo binæ inventæ sunt mediæ proportionales inter datas AD, DD, quemadmodum proponebatur.

§ 12.

Alia insuper proprietas ex ipsamet curvæ genesi colligi potest; ducta etenim qualibet in circulo ad Axem applicata SP, secante Cissoidem in D, atque a puncto D subtensa DD, si ad D ipsi DD normalis ducatur DC, junctaque AS, a puncto C super AS normaliter cadat recta CR: rectæ CP, CR sunt semper sibi invicem æquales.

Nam Ducta DS, est AR : AS = RC : SD. Verum SD æquatur ipsi DC (2): quare AR : AS, vel AC.AD = RC : CD,

CD, & invertendo $AD : AC^{2} = CD : RC$. Dividendo igitur, & convertendo erit $DC : AD = DC - RC : DC$. Quare $\overline{DC}^{2}$, vel ipsi æquale $\overline{DS}^{2} = AD \cdot \overline{DC - RC}$; eſt autem $\overline{DS}^{2} = AD$.



DP: ergo $AD \cdot \overline{DC - RC} = AD \cdot DP$, ideoque $DP = DC - RC$; & eſt $DP = DC - CP$: ergo $CP = RC$. Q. E. D.

F I N I S.

Pag.	lin.	ERRATA.	CORRIGE.
13.	8.	Sydx, Summa	Sydx, summa
14.	5.	nanſciſceris	naneiſceris
15.	6.	uſque ad lin. 15.	ad Fig. conſugiendum eſt, quæ p. 21. extat.
21.	23.	qradrilinea	quadrilinea
24.	3.	incognita	incognita
26.	4.	fuerit poſitivi	fuerint poſitivi
34.	14.	nanciſcimus	nanciſcimur

